MIT WAHRSCHEINLICHKEITEN FALSCHE ANNAHMEN WIDERLEGEN

EINFÜHRUNG

Geld- und Glücksspiele üben eine besondere Anziehungskraft auf Jugendliche und junge Erwachsene aus. Obwohl diese nur ein begrenztes Einkommen haben, betrachten sie solche Spiele als eine schnelle und einfache Möglichkeit, Geld zu verdienen.

Aber ihr Urteilsvermögen über ihre Gewinnaussichten ist oft mit Vorurteilen und falschen Annahmen behaftet. Sie sehen Geschick und Kompetenz, wo es nur Zufall gibt. Zu schnell vergessen sie das unerbittliche Gesetz der Wahrscheinlichkeiten. Darüber hinaus neigen Menschen dazu, eher positive Ereignisse (ich werde gewinnen) als negative Ereignisse (ich werde verlieren) zu erwarten.

Indem Sie die Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand von Beispielen und Übungen zum Thema Geld- und Glücksspiele im Mathematikunterricht behandeln, tragen Sie bereits dazu bei, exzessives Spielen bei Jugendlichen zu verhindern.

ZIEL

Dieses Arbeitsblatt behandelt Themen und Übungen zu den Gewinnaussichten und Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit Geldspielen. Dabei werden unterschiedliche Ziele verfolgt:

- Analyse der Auszahlungsquote verschiedener Arten von Spielen
- Ermittlung der Gewinnchancen und Verlustrisiken bei bestimmten Geldspielen
- Steigern der Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler in der spielbezogenen Entscheidungsfindung

ZIELPUBLIKUM

Dieses Arbeitsblatt ist für Lehrkräfte bestimmt, die die Möglichkeit haben, dieses Thema in ihrem Mathematikunterricht zu behandeln.

KENNZAHLEN

192'000 Die Anzahl der von exzessivem Spielen betroffenen Personen in der Schweiz *

16 Das Durchschnittsalter beim ersten Spieleinsatz

10 Der Multiplikationsfaktor: Zwischen 2014 und 2018 ist der Anteil von Jugendlichen mit riskantem und problematischem Spielverhalten von 0,4 % auf 4,5 % ** gestiegen

* Sucht Schweiz, Schweizer Suchtpanorama, 2021

** Sucht Schweiz, Schweizer Suchtpanorama, 2020

THEMENVORSCHLAG

1. EUROMILLIONS* ODER SWISS LOTTO**

Berechnen der Wahrscheinlichkeit, den Jackpot zu gewinnen

Die Gewinnsummen bei Zahlenlottos lassen jeden, der ein Kästchen für die nächste Ziehung ankreuzt, träumen. Aber die Wahrscheinlichkeit, den Jackpot zu gewinnen, ist lächerlich gering. Die sogenannte Optimismus-Verzerrung führt jedoch nicht selten dazu, dass die Gewinnchancen überschätzt werden. Es kann daher interessant sein, die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für den Gewinn des Jackpots sowie die Wahrscheinlichkeit für Zwischengewinne zu berechnen.

ÜBUNGEN

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, den EuroMillions-Jackpot zu gewinnen?***

Antwort

$$\mathbb{P} = \frac{\#\ richtiges\ Los}{\#\ mögliche\ Lose} = \frac{1}{C_5^{50} \times C_2^{12}} = \frac{1}{139'838'160}$$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, den Swiss-Lotto-Jackpot zu gewinnen?

Antwort

$$\mathbb{P} = \frac{\#\ richtiges\ Los}{\#\ mögliche\ Lose} = \frac{1}{C_6^{42} \times C_1^{6}} = \frac{1}{31'474'716}$$

Bei EuroMillions gewinnen die Spielerinnen und Spieler im Durchschnitt 250.– Franken, wenn sie vier Zahlen und einen Stern richtig getippt haben. Aber wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, diese Kombination zu tippen?

Antwort

$$\mathbb{P} = \frac{C_4^5 \times C_1^{45} \times C_1^2 \times C_1^{10}}{C_5^{50} \times C_2^{12}} = \frac{4'500}{139'830'160}$$

$\cong$ 0,0032 % => Wahrscheinlichkeit von **1 zu 30'000**

Bei Swiss Lotto gewinnen die Spielerinnen und Spieler bei vier Zahlen und der Glückszahl durchschnittlich 150.– Franken. Aber wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, diese Kombination zu tippen?

Antwort

$$\mathbb{P} = \frac{C_4^6 \times C_2^{36} \times C_1^1}{C_6^{42} \times C_1^6} = \frac{9'450}{31'474'716}$$

$\cong$ **0.03%** Wahrscheinlichkeit von **1 zu 3'330**

Hat man mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 im Swiss Lotto weniger Gewinnchancen als mit den Zahlen 7, 13, 21, 32, 39, 45?

Antwort

In beiden Fällen beträgt die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P} = \frac{1}{C_6^{42} \times C_1^6} = \frac{1}{31'474'716}$$

Einige Wahrscheinlichkeiten zum Vergleich:

Die Wahrscheinlichkeit, am 29. Februar geboren zu werden, liegt bei **1 zu 1'461.**

Die Wahrscheinlichkeit, eineiige Vierlinge zu bekommen, liegt bei **1 zu 13 Millionen.**

Die Wahrscheinlichkeit, eine Münze 27-mal hintereinander auf Kopf zu werfen, **liegt bei 1 zu 134'217'728.**

Die Wahrscheinlichkeit, die gleiche DNA wie eine andere nicht verwandte Person zu haben, **liegt bei 1 zu 46'000'000'000.**

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei EuroMillions mindestens eine Zahl oder einen Stern richtig zu haben?**

Antwort

$$\mathbb{P}\textbf{nichts richtig} = 1 - \frac{C_5^{45} \times C_2^{10}}{C_5^{50} \times C_2^{12}} =$$

$$= 1 - \frac{59'979'155}{139'830'160}$$

$\cong$ **60,6%** => Die Chance, etwas richtig zu haben, ist grösser, als nichts richtig zu haben. Aus diesem Grund erhalten die Spielerinnen und Spieler nur bei zwei oder mehr angekreuzten Gewinnzahlen eine Auszahlung

* **Erläuterung:** EuroMillions ist eine internationale Lotterie, die 2004 eingeführt wurde, an der neun europäische Länder, darunter die Schweiz, teilnehmen. Jeden Dienstag und Freitag findet eine Ziehung statt. Die Spielerin bzw. der Spieler muss 5 Zahlen zwischen 1 und 50 und 2 Sterne zwischen 1 und 12 wählen. Um den Jackpot zu gewinnen, muss man alle 5 Zahlen sowie die 2 Sterne richtig haben.

** **Erläuterung**: Swiss Lotto ist eine Schweizer Lotterie. Jeden Mittwoch und Samstag findet eine Ziehung statt. Die Spielerin bzw. der Spieler muss 6 Zahlen zwischen 1 und 42 und 1 Glückszahl zwischen 1 und 6 wählen. Um den Jackpot zu gewinnen, muss man alle 6 Zahlen sowie die Glückszahl richtig haben

*** **Erläuterung:** $C_k^n = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$

THEMENVORSCHLAG

2. RUBBELLOSE

Übungen zur Auszahlungsquote von Rubbellosen

Die Loterie Romande stellt für jede Art von Rubbellos einen Gewinnplan zur Verfügung. Die Tabelle unten zeigt den Plan für Tribolo-Lose, die 2.– Franken pro Los kosten.

Gewinnplan für das Tribolo-Los für eine Tranche von 500'000 Losen zu je 2.–		
Anzahl Gewinnlose	**Gewinn pro Los in CHF**	**Gesamtbetrag in CHF**
1	20’000	20’000
1	10’000	10’000
2	5’000	10’000
10	1’000	10’000
12	500	6’000
50	200	10’000
470	100	47’000
1’500	50	75’000
2’000	20	40’000
5’000	10	50’000
7’000	6	42’000
35’000	4	140’000
75’000	2	150’000
126’046		610’000

Diese Tabelle ist den auf der Website der Loterie Romande veröffentlichten Gewinnplänen entnommen. Ansehen

ÜBUNGEN

Fragen Sie die Schülerinnen und Schüler ausgehend vom Tribolo-Gewinnplan (Grafik links):

Für eine Tranche von 500'000 Losen:

- Was ist die Differenz zwischen dem eingesetzten Betrag und dem an die Spielerinnen und Spieler ausgezahlten Betrag?

Antwort:
(500’000 x 2) – (20’000 + 10’000 +...+ 150’000)
= 390’000 CHF die aussen vor bleiben.

- Wie viele Gewinnlose gibt es?

Antwort: 126’046 Lose

- Welchen prozentualen Anteil macht das aus?

Antwort:

$\frac{126'046}{500'000}$ x 100 = 25,21%

oder eine Wahrscheinlichkeit von 3 zu 4, eine Niete zu kaufen.

3. GELDSPIELAUTOMATEN

Übungen zur Auszahlungsquote bei Geldspielautomaten

Geldspielautomaten in Casinos sind so programmiert, dass sie theoretisch zwischen 85 % und 95 % der Einsätze auszahlen. Jede Ziehung ist unabhängig.

ÜBUNGEN

Bitten Sie die Schülerinnen und Schüler, rechnerisch zu erklären, warum eine Person mit zunehmender Spieldauer an einem Spielautomaten immer mehr Geld zu verlieren droht. Nehmen Sie ein Beispiel und verwenden Sie die theoretische Auszahlungsquote.

Antwort: Wenn eine Spielerin/ein Spieler beispielsweise 100.– Franken in einen Automaten mit einer Auszahlungsquote von 90 % einwirft und spielt, müsste sie/er theoretisch am Ende des Spiels 90.– Franken gewonnen haben. Wenn sie/er noch einmal spielt, müsste er am Ende 90 % von 90 gewonnen haben – also 81.– Franken – und so weiter.

THEMENVORSCHLAG

4. ROULETTE

Berechnen Sie die theoretische Auszahlungsquote beim Roulette.

Englisches Roulette (37 Zahlen) ist ein typisches Spiel im Casino. Manche Menschen haben einen guten Teil ihres Lebens damit verbracht, eine Spieltaktik zu entwickeln, die gemeinhin als «Martingale****» bezeichnet wird, um langfristige Gewinne zu sichern. Vergeblich, abgesehen von Falschspielern. Denn langfristig kann nur das Casino gewinnen. Es kann sich also lohnen, dies anhand von Wahrscheinlichkeiten zu demonstrieren.

ÜBUNGEN

Wie hoch ist die theoretische Auszahlungsquote, wenn ein Spieler auf Rot oder Schwarz setzt, und wie hoch ist die Auszahlungsquote, wenn eine Spielerin auf eine volle Zahl setzt*****?

Antwort rot/schwarz

$$\mathbb{P} = 2 \times \frac{\#\ schwarze\ Zahlen}{\#\ rote\ Zahlen} + 0.5 \times \frac{\#\ des\ 0}{\#\ alle\ Zahlen} = 2 \times \frac{18}{37} + 0.5 \times \frac{1}{37} = 0{,}973 + 0{,}0135$$

Die theoretische Auszahlungsquote beträgt 98,65 %.

Antwort volle Zahl

$$\mathbb{P} = \frac{\#\ gesetzte\ Zahl}{\#alle\ Zahlen} = 36 \times \frac{1}{37} = 0{,}973$$

Die theoretische Auszahlungsquote beträgt 97,3 %.

In jedem Fall kann das Casino nur gewinnen.

ÜBUNGEN

Eine Person beschliesst, beim Roulette ein sogenanntes kleines Martingale zu spielen, indem sie auf Rot setzt. Ihr Grundeinsatz beträgt 5.– Franken. Wenn Rot fällt, steckt sie 5.– Franken ein und lässt ihren Einsatz von 5.– Franken auf dem Spielteppich liegen. Wenn Schwarz fällt, verdoppelt sie ihren Einsatz auf Rot für die nächste Runde (10.– Franken) und so weiter, bis Rot fällt. Sie setzt dann wieder ihren ursprünglichen Einsatz von 5.– Franken und spielt nach dem gleichen Muster weiter (der Einfachheit halber wird die 0 nicht berücksichtigt). Wenn das Casino, in dem sich die Person befindet, die Roulette-Einsätze auf 1'200.– Franken begrenzt, ab wann funktioniert die Methode nicht mehr? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis eintritt?

Antwort Obergrenze überschritten: $2^{n-1}>1200/5 \Rightarrow \log_2(2^{n-1}) > \log_2(240) = n-1>7{,}91 = n>8{,}91$.
Beim 9. Einsatz ($5 \times 2^{9-1} = 1'280$.-), überschreitet die Person die Obergrenze.

Antwort Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: $P(9 \times \text{nicht-Rot})=(19/37)^9 \cong 0{,}00248294 \cong 0{,}25\%$.Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis eintritt, liegt bei 1 zu 400.

Verschiedene Videos auf dem Arbeitsblatt zu den Videos über Geldspiele können ergänzend zu diesen Übungen sehr interessant sein.

Anregung zu einer Diskussion im Anschluss an die Übung mit Ihren Schülerinnen und Schülern

- Hat sich ihre Einstellung zu Geldspielen verändert?
- Warum spielen wir, wenn die Wahrscheinlichkeit immer wieder zu unseren Ungunsten ausfällt?
- Was kann man tun, wenn jemand unter einer Glücksspielproblematik leidet? Siehe in diesem Zusammenhang **www.sos-spielsucht.ch.**

**** **Erläuterung:** : Ein Martingale ist eine Technik, die darauf abzielt, Gewinne bei Geld- und Glücksspielen zu erzielen, ohne die Spielregeln zu verletzen. Das klassischste Martingale ist, beim Roulette immer den gleichen Betrag auf Rot oder Schwarz zu setzen. Wenn die Spielerin/der Spieler gewinnt, steckt sie/er den Gewinn ein und setzt erneut den ursprünglichen Einsatz ein. Verliert sie/er, verdoppelt sie/er den Einsatz und so weiter, bis sie/er gewinnt und dann wieder ihren/seinen ursprünglichen Einsatz spielt. Alle klassischen Spiele sind so konstruiert, dass Martingale nicht funktionieren. Beim Roulette gilt in einigen Casinos eine Obergrenze für den Geldbetrag, der gesetzt werden kann (z. B. nicht mehr als 2 500.– Franken).

***** **Erläuterung:** Das englische Roulette ist ein Kessel mit 37 Zahlen (in den Farben Rot oder Schwarz). Diese Zahlen sind auf einem Spielteppich abgebildet, auf dem die Spielerinnen und Spieler ihre Einsätze platzieren. Neben diesen Zahlen können die Spielerinnen und Spieler auf mehreren Feldern Wetten auf Ereignisse platzieren, die mit den Zahlen zusammenhängen. Dabei kann man insbesondere auf die Farbe der Zahl setzen, die fällt (18 rote oder 18 schwarze Zahlen). Die 0 besitzt keine Farbe. Wenn die Spielerin oder der Spieler auf eine volle Zahl setzt (z. B. 5.– Franken auf 17) und diese fällt, gewinnt sie/er das 36-fache des Einsatzes. Wenn auf Rot gesetzt wird und Rot fällt, gewinnt die Spielerin/der Spieler das 2-fache ihres/seines Einsatzes; wenn 0 fällt, erhält die Person die Hälfte des Einsatzes zurück, den sie auf Rot gesetzt hat (aber nichts, wenn der Einsatz auf eine andere feste Zahl fällt).